

Modelado numérico de problemas de flujo de agua

Numerical modeling of water flow problems

Norma Patricia LÓPEZ-ACOSTA¹

¹Investigadora, Instituto de Ingeniería, UNAM

RESUMEN: En este artículo se presenta un compendio de los principales métodos que existen para realizar análisis de flujo de agua. El enfoque principal se pone en los métodos aproximados aplicados mediante computadoras. Se resumen los principales algoritmos actuales que permiten llevar a cabo este tipo de análisis. Asimismo se proporcionan lineamientos generales de las metodologías a seguir para análisis más específicos, como aquéllos de flujo transitorio ocasionado por vaciado de agua y flujo en medios parcialmente saturados. Se hace hincapié en la necesidad de realizar análisis estocásticos de flujo de agua. Finalmente, se dan conclusiones y recomendaciones generales para efectuar análisis numéricos de flujo de agua en suelos.

ABSTRACT: In this paper, an overview of the most important existing methods for performing analyses of water flow is presented. The emphasis is put on the approximate methods applied by means of computers. The main current algorithms to execute this type of analysis are summarized. General guidelines of methodologies to follow for more specific analyses, such as transient-state flow caused by water drawdown and flow in partially saturated media are also provided. It is emphasized the lack of stochastic analyses of water flow. Finally, conclusions and recommendations are given to carry out numerical analysis of water flow in soils.

1 INTRODUCCIÓN

Los análisis de flujo de agua a través de un medio poroso o estructura térrea se realizan para tratar de garantizar la seguridad de la estructura y evitar alguno de los siguientes problemas:

- Altos gradientes hidráulicos.*- pueden ocasionar la falla local (erosión local o tubificación), o incluso la falla total de la estructura soportada por el suelo.
- Altas presiones de agua.*- pueden ocasionar volteo o flotación de las estructuras apoyadas en el suelo.
- Pérdidas de agua.*- por el flujo a través de una presa y su cimentación, por el flujo en una laguna artificial, por el flujo en un vaso de almacenamiento, etc.

La consideración del flujo de agua es importante en áreas relacionadas con las presas de tierra, las excavaciones, la estabilidad de pavimentos, y la estabilidad de taludes y de muros de retención. La Tabla 1 presenta un resumen de los objetivos que se persiguen al considerar el flujo de agua en distintos problemas de ingeniería geotécnica.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El flujo a través de suelos saturados y parcialmente saturados está gobernado por la Ley de Darcy, la cual, fue propuesta originalmente para medios saturados. Investigaciones adicionales demostraron que esta ley también es aplicable al estudio del flujo de agua en suelos parcialmente saturados (Richards, 1931). La principal diferencia es que para medios saturados la conductividad hidráulica es un valor constante, y para suelos parcialmente saturados la conductividad hidráulica varía en función del contenido de agua volumétrico e indirectamente también varía con los cambios en la presión de poro (Fig. 1) (Fredlund y Morgenstern, 1976, Fredlund y Morgenstern, 1977).

La Ley de Darcy se escribe a menudo como:

$$v = k i \quad (1)$$

donde v = velocidad de Darcy; k = conductividad hidráulica; y i = gradiente hidráulico.

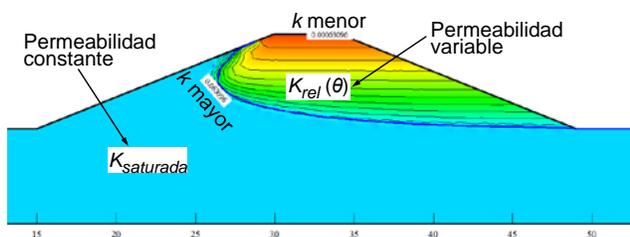


Figura 1. Variación de la permeabilidad en un medio parcialmente saturado (López-Acosta y Auvinet, 2012).

La velocidad media a la que el agua se mueve dentro de una masa de suelo es una velocidad lineal, que es igual a la velocidad de Darcy dividida entre la porosidad del suelo. En un suelo parcialmente saturado, es igual a la velocidad de Darcy dividida entre el contenido de agua volumétrico θ . En la actualidad, la mayoría de los métodos analíticos y numéricos empleados para resolver problemas de flujo de agua consideran solamente la velocidad de Darcy.

Tabla 1. Objetivos de la consideración del flujo de agua en distintos problemas de ingeniería geotécnica (modificado de Reddi, 2003).

Problema de ingeniería	Objetivo de la consideración del flujo de agua
Presas	Las altas presiones del agua en el lado de aguas arriba deben controlarse mediante filtros adecuados y capas drenantes dentro de las presas de tierra para proteger contra erosión interna y tubificación. En adición, el flujo a través de los materiales de la cimentación debajo de las presas puede requerir ser minimizado o aislado. Asimismo la generación de fuerzas de flujo, y de subpresión son consideraciones importantes que deben tomarse en los análisis.
Terraplenes y taludes	El agua debe drenarse fuera del talud para mantenerlo seco y protegerlo contra deslizamientos.
Estabilidad de taludes	Las altas presiones de poro reducen la resistencia al esfuerzo cortante de los suelos, por este motivo es importante considerar el efecto del flujo de agua en los análisis de estabilidad de un talud.
Estructuras de retención de tierra	Las presiones hidrostáticas e hidrodinámicas debidas al agua deben aliviarse para proporcionar un drenaje adecuado que ayude a mantener la estabilidad de la estructura de retención.
Excavaciones	Abatimiento: el nivel freático debe abatirse lo suficiente para facilitar la construcción.
Cimentaciones	La interrupción permanente del flujo puede ser necesaria para mantener estanca una cimentación.
Túneles	Los túneles revestidos o no, tienden a actuar como drenes permanentes en el terreno (Ward y Pender, 1981). Se debe controlar el flujo hacia el interior de un túnel en la etapa de construcción y durante su vida útil.
Sistemas contenedores de residuos	El flujo a través de las barreras de aislamiento de los residuos debe minimizarse. Se deben proveer capas de drenaje dentro de los contenedores de residuos para drenar los lixiviados.
Pavimentos	El flujo debe controlarse o interrumpirse para mantener secas las bases o sub-bases de los pavimentos. Se deben colocar capas de drenaje debajo de las losas de los pavimentos para drenar fuera el agua infiltrada a través de las mismas.

2.1 Ecuación para análisis de flujo establecido (medios porosos en estado saturado)

La ecuación que permite estudiar el flujo estacionario en un medio poroso se fundamenta en la Ley de Darcy y en el principio de continuidad de flujo (el cual, señala que la cantidad de agua que entra al medio es la misma que sale), y se conoce como la ecuación de Laplace (para un medio homogéneo e isótropo con $k_x=k_y=k_z$):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

donde h = carga hidráulica total; y k_x, k_y, k_z = conductividad hidráulica en las direcciones del espacio x, y, z , respectivamente.

La ecuación de Laplace se cumple bajo las siguientes hipótesis:

- El flujo es establecido.
- El suelo está saturado.
- El agua y las partículas sólidas son incompresibles.
- El flujo no modifica la estructura del suelo en ninguna forma.
- Hay ausencia de fuentes (ya sea inyección o extracción de agua).

2.2 Ecuación para análisis de flujo transitorio (medios porosos en estado saturado y parcialmente saturado)

En el estudio del flujo transitorio, los niveles de agua van variando en función del tiempo, y en consecuencia, se va almacenando o desalmacenando agua en el medio. La hipótesis que se asume en este caso es:

Gasto que sale = gasto que entra – gasto desalmacenado en un intervalo de tiempo Δt (3)

O bien:

Gasto que sale = gasto que entra + gasto almacenado en un intervalo de tiempo Δt (4)

La expresión (3) se refiere a un caso de vaciado de agua, y la ecuación (4), al caso de un llenado de agua.

Tomando en consideración las hipótesis anteriores, se establece la ecuación general de balance de masa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Q = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{5}$$

donde h = carga hidráulica total; k_x = conductividad hidráulica en la dirección x ; k_y = conductividad hidráulica en la dirección y ; Q = término fuente (flujo frontera aplicado: inyección o extracción); θ = contenido de agua volumétrico; y t = tiempo.

La expresión (5) se conoce como *ecuación de Richards*, y permite estudiar el flujo transitorio en suelos parcialmente saturados. El término de la derecha $\partial\theta/\partial t$ (tasa de cambio de contenido de agua volumétrico respecto al tiempo) está relacionado con la variación de los niveles de agua en función del tiempo. Cuando no hay variación en el tiempo ($\partial\theta/\partial t=0$) y no existe un término fuente ($Q=0$), la ec. (5) se convierte en la ecuación de Laplace, en la que el flujo es establecido y el suelo está saturado.

La ecuación de *Richards*, o cualquiera de sus formas modificadas, ha constituido la base para el desarrollo de la mayoría de los modelos numéricos para calcular infiltración a través de medios porosos parcialmente saturados bajo condiciones de flujo transitorio (Espinoza 1993).

3 MÉTODOS DE ANÁLISIS DE FLUJO DE AGUA

3.1 Soluciones analíticas

3.1.1 Solución exacta

Una solución analítica exacta generalmente solo es posible cuando la geometría del dominio de flujo y las condiciones hidráulicas y de frontera son sencillas (medios homogéneos e isótropos). Sin embargo, es una realidad que todo suelo es un medio heterogéneo, anisótropo y discontinuo que presenta en cada punto características diferentes. Así, las soluciones exactas resultan laboriosas en el caso de problemas de flujo más complejos, como los que se presentan en la ingeniería geotécnica práctica. Por este motivo, usualmente se recurre a las soluciones aproximadas.

3.1.2 Transformación o mapeo conforme

Una de las soluciones analíticas aproximadas que existen para resolver problemas de flujo bidimensional de agua, sugiere la obtención de una función que permita transformar un problema del dominio geométrico que se busca resolver en un problema cuya solución sea conocida (Flores, 2000). Se trata de funciones que transforman figuras geométricas de un plano complejo ω en figuras de otro plano complejo ζ . Se entiende entonces por mapeo el procedimiento mediante el cual se hacen corresponder los puntos de una figura de un plano ω con los puntos de la figura respectiva en el plano ζ . Una transformación o función de mapeo se llama conformal o conforme (*conformal mapping*) cuando no modifica los ángulos de intersección ni las formas geométricas aproximadas entre los planos de interés (Harr, 1962). Con estas bases, la ecuación

diferencial de Laplace puede resolverse para un dominio G (Fig. 3), si la transformación o mapeo conforme de este dominio con algún otro dominio G_1 más simple (Fig. 2) es conocida (Harr, 1962; Panov, 1963; Spiegel, 1964). La transformación se realiza por medio de la función analítica de una variable compleja. Una de las funciones más conocidas que transforma un sistema de flujo uniforme en el plano ω (Fig. 2), en un sistema de flujo con parábolas cofocales en el plano ζ (Fig. 3), es:

$$\zeta = \omega^2 \tag{6}$$

En los planos ω y ζ de las Figuras 2 y 3, respectivamente, ψ es una función de flujo y ϕ es una función equipotencial.

La función de la ec. (6) es de gran importancia, ya que fue la base para plantear la solución de problemas de flujo no confinado de agua (flujo a través de una presa de tierra con un filtro horizontal) mediante la denominada *parábola de Kozeny* (Harr, 1962).

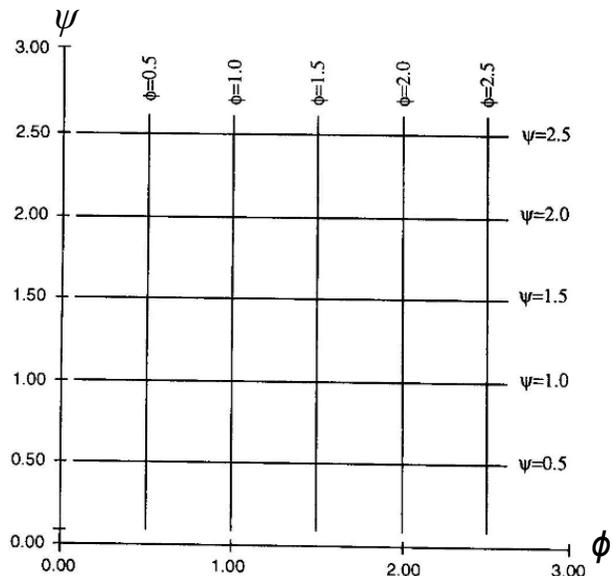


Figura 2. Dominio G_1 : Funciones ψ y ϕ en el Plano ω (Flores, 2000).

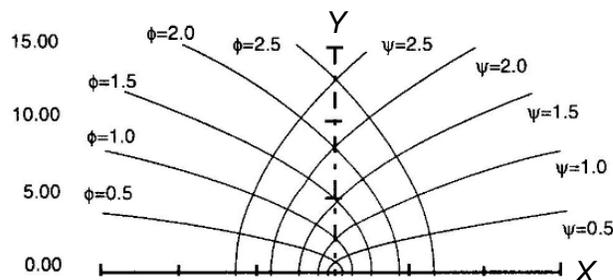


Figura 3. Dominio G : Funciones ψ y ϕ en el Plano ζ (Flores, 2000).

3.1.3 Método de los fragmentos

Se trata de un método analítico aproximado para dominios de flujo confinado de profundidad finita. La consideración fundamental, es que las líneas equipotenciales en diversas partes de la región de flujo pueden representarse de manera aproximada mediante líneas rectas verticales, las cuales, dividen la región de flujo en secciones o fragmentos (Fig. 4) (Poluvarinova-Kochina, 1962; Harr, 1962).

El método de los fragmentos requiere la obtención de un factor de forma Φ que se determina mediante la solución de integrales definidas establecidas para cada fragmento distinto en que se divide la región de flujo. Existen tablas que proporcionan las expresiones de diversos factores de forma que ya han sido calculados para ciertos problemas típicos de flujo confinado (Poluvarinova-Kochina, 1962; Harr, 1962).

La ecuación que permite el cálculo del gasto con este método es:

$$q = k \frac{\sum \Delta h_n}{\sum \Phi_n} = \frac{k \cdot \Delta h}{\sum_{n=1}^m \Phi_n} \quad (7)$$

donde k = conductividad hidráulica del medio homogéneo e isótropo; Δh_n = pérdida de carga hidráulica en el fragmento n ; Δh = pérdida de carga hidráulica total; y Φ_n = factor de forma adimensional en el fragmento n .

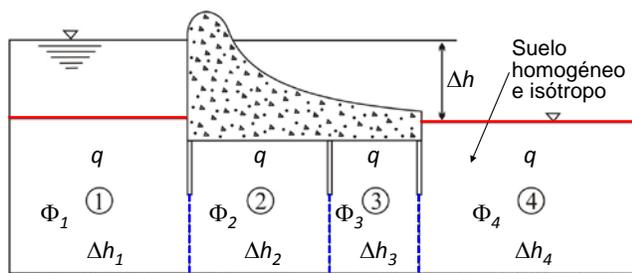


Figura 4. Consideración esquemática del método de los fragmentos.

El método de los fragmentos fue propuesto originalmente para estudiar el flujo confinado en medios homogéneos e isótropos, pero en la actualidad ya se ha implementado su uso a medios anisótropos (Shehata, 2006), y también, en combinación con el mapeo conforme y la parábola de Kozeny, se ha aplicado a la solución de problemas de flujo no confinado a través de bordos homogéneos con filtros horizontales (Mishra y Singh, 2005).

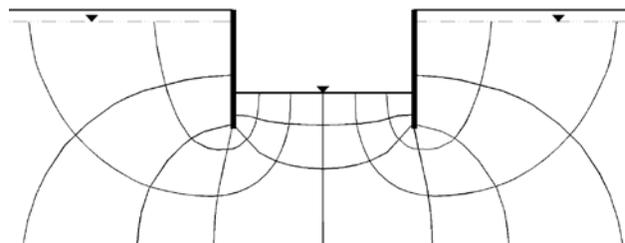
3.2 Soluciones gráficas

La técnica aproximada más popular que existe para resolver problemas de flujo de agua, es la conocida como *red de flujo*. Se trata de un método gráfico que establece que existen dos funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y que, geoméricamente, constituyen dos familias de curvas ortogonales entre sí: las líneas equipotenciales (de potencial ϕ constante) y las líneas de corriente (de valores iguales de la función de corriente ψ). La construcción gráfica de tales líneas es la que recibe el nombre de red de flujo. Un dibujo de este tipo que satisfaga las condiciones de frontera y de ortogonalidad, permite resolver de un modo sencillo y puramente gráfico un problema de flujo de agua en el que el suelo es homogéneo e isótropo. La expresión que permite el cálculo del gasto con la ayuda de una red de flujo es:

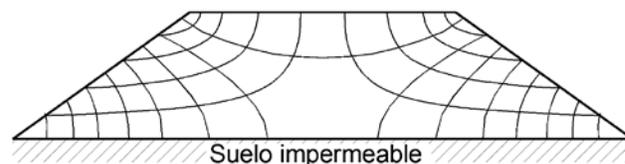
$$q = kh \left(\frac{n_f}{n_e} \right) = kh\$ \quad (8)$$

donde k = conductividad hidráulica del medio homogéneo e isótropo; h = pérdida de carga hidráulica total; y $\$ = n_f / n_e$ es el factor de forma.

Lo usual es dibujar las redes de flujo en papel, sin embargo, actualmente es posible el trazo de redes de flujo por computadora empleando distintos métodos numéricos como el método de elementos finitos, o bien, aquéllos fundamentados en ecuaciones de diferencias finitas (López-Acosta y González, 2014) como las *sobre-relajaciones sucesivas* (Young, 1950), el método de *Baiocchi* (Baiocchi, 1971), la técnica de la *Presión Extendida* (Bardet y Tobita, 2002), entre otros. Ejemplos de redes de flujo dibujadas con ayuda de los métodos anteriores se presentan en las Figuras 5a y 5b, 6, 7, 8a y 8b.



a) Dominio con dos tablestacas impermeables



b) Terraplén

Figura 5. Redes de flujo en medios homogéneos e isótropos, obtenidas con el método de *sobre-relajaciones sucesivas* (SOR; González y López-Acosta, 2014).

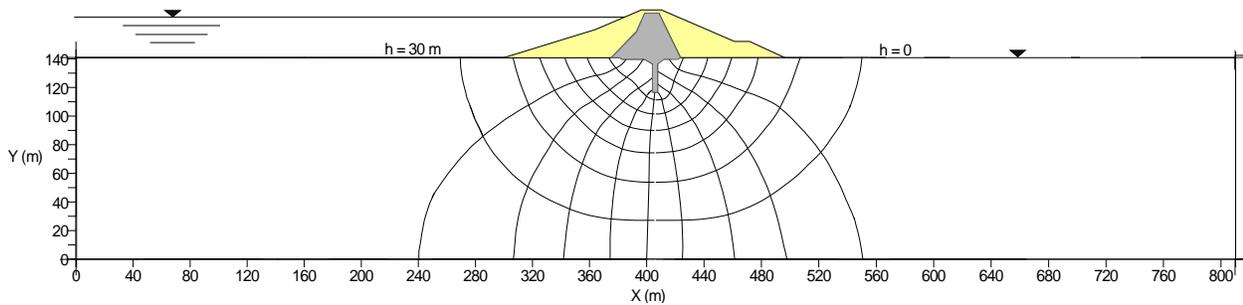


Figura 6. Red de flujo en un medio homogéneo e isótropo obtenida con el método de *elementos finitos* (López-Acosta, 2010).

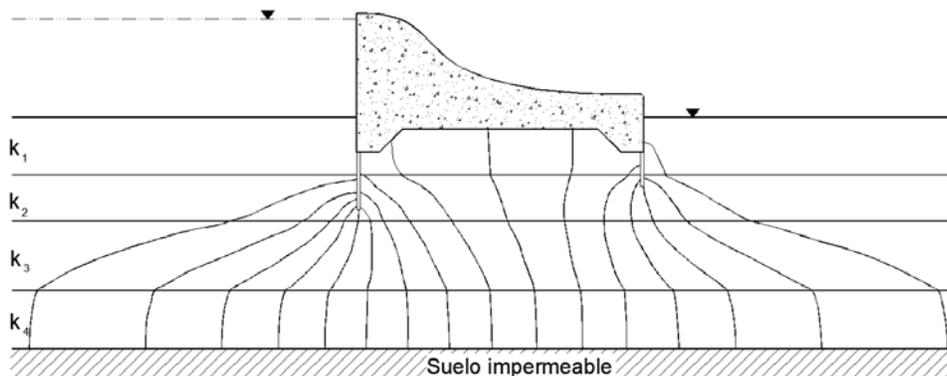
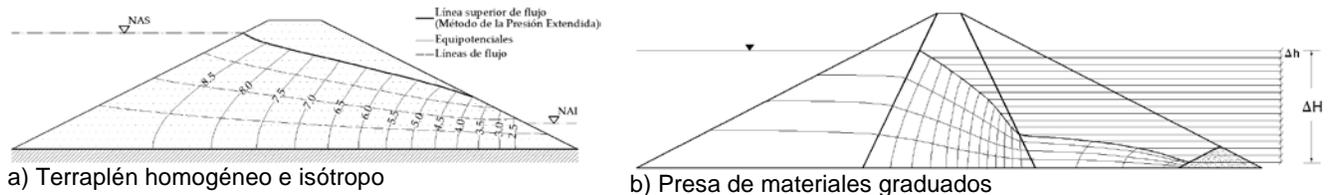


Figura 7. Red de flujo en un suelo estratificado bajo una presa impermeable, obtenida con el método *sobre-relajaciones sucesivas* (SOR; González y López-Acosta, 2014).



a) Terraplén homogéneo e isótropo

b) Presa de materiales graduados

Figura 8. Redes de flujo obtenidas con a) método de *Baiocchi*, y b) técnica de la *Presión Extendida* (González y López-Acosta, 2014).

3.3 Soluciones numéricas (soluciones aproximadas)

3.3.1 Elementos finitos

El método del elemento finito es una técnica numérica que proporciona soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales para resolver un problema de campo determinado. Es un método versátil respecto a otros métodos, puesto que permite la consideración de anisotropía, heterogeneidad y múltiples condiciones de frontera. En los problemas de flujo de agua los elementos finitos en 2D que generalmente se utilizan son triángulos (PLAXFLOW; Delft University of Technology 2008) o una combinación de triángulos y cuadrados (SEEP/W; GEO-SLOPE International Ltd., 2008), cuyos nodos coinciden con sus vértices; o bien, triángulos (2D) y tetraedros (3D) (SVFLUX; Thode y Gitirana, SoilVision Systems Ltd., 2014).

Dentro de cada elemento finito se asume que la carga hidráulica varía linealmente, y mediante un enfoque variacional se resuelve la ecuación de Laplace. Es decir, la resolución de esta ecuación en un determinado dominio se sustituye por la obtención del mínimo de una funcional asociada a dicha ecuación y definida para el mismo dominio. Con estas bases, y después de diversas manipulaciones matemáticas se establecen sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

$$[S]\{h_r\} = 0 \quad (9)$$

$$[S]\{\psi_r\} = 0 \quad (10)$$

La solución del sistema (9) mediante algún método conocido como la *eliminación gaussiana*, permite determinar la carga hidráulica h en aquellos nodos de la malla de elementos finitos donde no se conoce. De forma similar, la resolución del sistema

(10) proporciona los valores nodales de la función de corriente ψ . Dibujando las curvas de isovalores de este par de familias, es posible el trazo de la red de flujo del problema que se trate. De igual forma, una vez calculadas las cargas hidráulicas h con la ec. (9), se obtienen otros resultados de flujo de agua, como gradientes hidráulicos, velocidades de flujo, presión de poro, grado de saturación, gasto de infiltración, etc.

3.3.2 Diferencias finitas

La ecuación de Laplace puede resolverse empleando ecuaciones en términos de diferencias finitas, mismas que se establecen mediante series de Taylor truncadas, o directamente de la ley de Darcy. Existen varios métodos que permiten evaluar problemas de flujo de agua que utilizan diferencias finitas, entre ellos: a) método clásico de relajaciones, b) método de sobre-relajaciones sucesivas, c) paseos casuales o caminatas aleatorias.

3.3.2.1 Método clásico de relajaciones

El método clásico de relajaciones consiste en dibujar una malla cuadrículada (similar a la de las Figs. 9 y 10) en la región de flujo (homogénea e isótropa), donde cada intersección representa un nodo. En aquellos nodos donde se desea calcular la carga o potencial hidráulico h se deben asignar valores aproximados de h , respetando los potenciales h conocidos en las fronteras de flujo. Los valores que se asignan en los nodos, pueden ser cero o el resultado de una estimación razonable, en este último caso, deben estar comprendidos entre los valores de frontera (que generalmente corresponden a los niveles de aguas arriba y aguas abajo del problema que se trate).

Una forma de verificar que los potenciales h establecidos en los nodos son correctos, es mediante la *técnica del residuo* (Juárez-Badillo y Rico, 1972), la cual, consiste en obtener la diferencia de carga hidráulica entre un nodo central y los nodos que lo rodean. Si esta diferencia es igual a cero en todos los nodos, entonces los valores de h impuestos son correctos, en caso contrario, resulta necesario modificarlos tantas veces hasta que el residuo en todos los nodos sea cero, lo cual, indica el cumplimiento de la ecuación de Laplace en el dominio de estudio, y por tanto, que el problema de flujo está resuelto.

Una desventaja del método de relajaciones es que se fundamenta en asignar valores arbitrarios en los nodos de la malla de estudio, ocasionando que difícilmente en una primera etapa de cálculo los residuos en los nodos sean cero, por lo que, generalmente resultan necesarias etapas adicionales de reasignación de valores, haciendo que el método se vuelva largo y laborioso para fines prácticos.

3.3.2.2 Técnica de sobre-relajaciones sucesivas

La técnica de *sobre-relajaciones sucesivas* (SOR, *Successive over-relaxation*) (Young, 1950), constituye una mejoría del método clásico de relajaciones, en la que el proceso de refinamiento del residuo en los nodos se vuelve automático a través de toda la retícula, debido a que utiliza el método iterativo de Gauss-Seidel, con el que es posible obtener residuos de cero o prácticamente cero en todos los nodos, permitiendo solucionar problemas de flujo de agua con relativa rapidez y sencillez (Allen, 1954, Finnemore y Perry, 1968). Adicionalmente, una ventaja muy importante del método SOR es que permite la solución de los denominados *problemas de superficie libre* (o de flujo no confinado), en los que se debe determinar la posición de la superficie libre (freática) como parte de la solución del problema. Para este tipo de problemas se han desarrollado otras mejoras al método SOR: a) Solución de Baiocchi (1971), y b) Método de la de Presión Extendida (Brezis *et al.*, 1979, Bardet y Tobita, 2002). El primero, permite determinar la posición de la superficie freática (línea de corriente superior para flujo establecido) en un medio homogéneo (Fig. 8a), y el segundo, ayuda a establecer esta línea tanto en medios homogéneos como heterogéneos (Fig. 8b).



Figura 9. Arreglo esquemático de nodos en la presa de materiales graduados de la Fig. 7b con el método de la Presión Extendida (González y López-Acosta, 2014).

3.3.2.3 Paseos casuales o caminatas aleatorias

El método de los paseos casuales (*RWM, Random Walk Method*) consiste en estudiar los movimientos de una partícula que se desplaza en forma aleatoria sobre los nodos de una malla (Figs. 10a y 10b) con que se modela el dominio de flujo en estudio, permitiendo determinar la carga hidráulica en los puntos de interés del suelo a partir de la resolución numérica de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas. Este método recurre a las denominadas *técnicas de Monte Carlo* (Marsal y Reséndiz, 1968; Auvinet, 1975) las cuales constituyen una alternativa a los métodos usuales de análisis de flujo de agua.

Específicamente, el método consiste en generar una serie de trayectorias aleatorias (mediante números aleatorios) a partir del nodo p_0 de la malla, en el cual se desea estimar la carga hidráulica. Así, la partícula se desplaza de manera aleatoria a través de los nodos interiores de dicha malla y se detiene

cuando llega a algún nodo de la frontera, denominado *absorbente*, porque en él se conoce el valor de la carga hidráulica (condición de frontera impuesta). De esta manera, una trayectoria completa está constituida por una secuencia de nodos, siendo el último un nodo *absorbente*. La carga hidráulica se determina entonces, contando los números de trayectorias que terminan en las distintas fronteras, multiplicándolos por el valor de la carga hidráulica en la frontera respectiva y dividiendo el resultado entre el número total de trayectorias. Este procedimiento se repite un número de veces determinado y el resultado obtenido es una medida insesgada de la carga hidráulica en el nodo de estudio:

$$h_0 = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} \quad (11)$$

donde h_0 = carga hidráulica que se calcula en el punto p_0 (Fig. 10b); f_1 y f_2 = fronteras con carga hidráulica conocida; n_1 y n_2 = número de trayectorias que llegan a las fronteras 1 y 2, respectivamente.

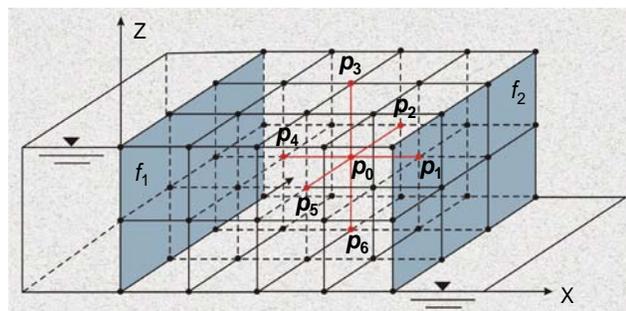
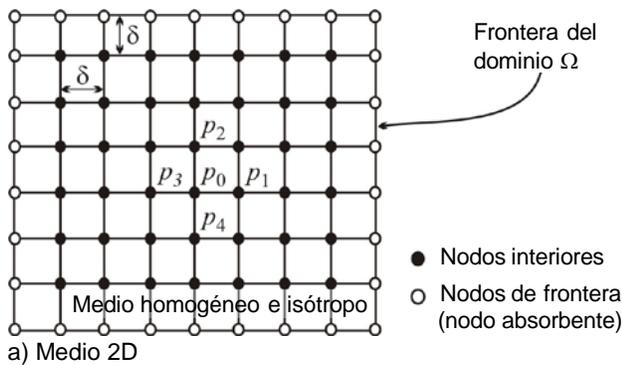


Figura 10. Mallas 2D y 3D con que se modela la región de flujo mediante el método de los paseos casuales (López-Acosta, 2010).

El método de los paseos casuales se ha utilizado en la solución de problemas de flujo confinado de agua (Auvinet, 1975), y también en el cálculo de la permeabilidad equivalente de medios heterogéneos simulados (López-Acosta, 2010):

- Análisis 1D → $k_{equivalente}$ es la media armónica.
- Análisis 2D → $k_{equivalente}$ es la media geométrica.

- Análisis 3D → $k_{equivalente}$ tiende a la media aritmética.

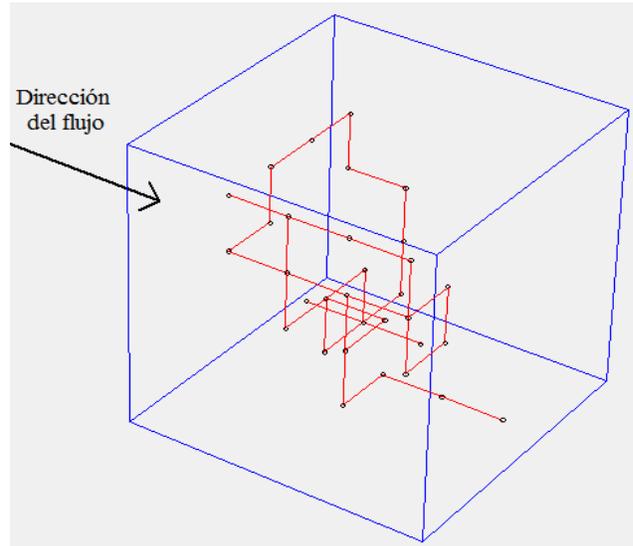


Figura 11. Ejemplo de una caminata aleatoria con el algoritmo PASECA-2003 (López-Acosta, 2010).

3.4 Soluciones estocásticas

La incertidumbre debida a la variación espacial de la permeabilidad, es el factor aleatorio más importante que debería tomarse en cuenta en los análisis de flujo de agua en suelos. Un resumen de las principales técnicas para evaluar la propagación de la incertidumbre se proporciona en la Figura 12.

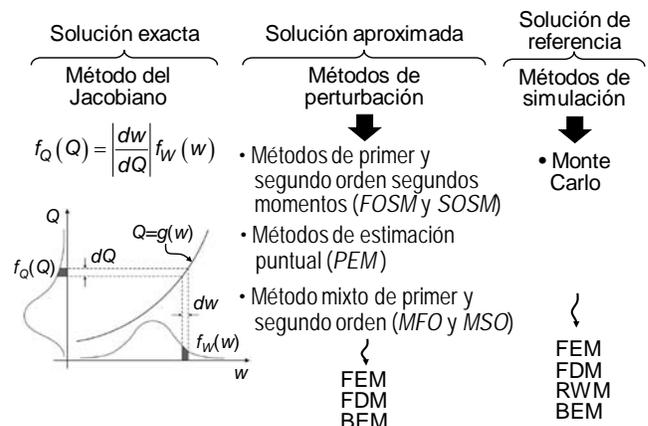


Figura 12. Resumen de principales métodos para evaluar la incertidumbre en los análisis de flujo de agua (López-Acosta, 2010).

Es común que las técnicas probabilistas se utilicen en combinación con métodos numéricos, como elementos finitos (FEM), diferencias finitas (FDM), ecuaciones integrales (BEM), paseos casuales (RWM). Un análisis estocástico permite una evaluación más realista de los problemas de flujo agua, además puede ser útil para definir zonas de

incertidumbre, con las que es posible identificar aquellas partes de la región de flujo que están propensas a variaciones importantes de propiedades como la carga hidráulica, el gradiente hidráulico, la velocidad de flujo, etc., como se ilustra en las Figuras 13 y 14 (López-Acosta, 2010).

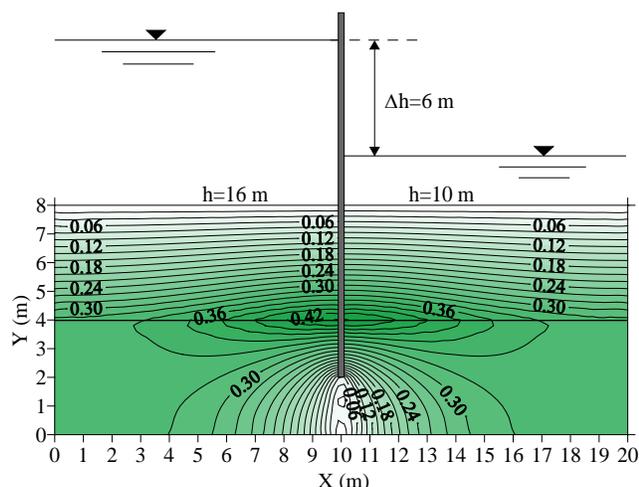


Figura 13. Desviación estándar en la carga hidráulica (m) bajo una tablestaca en un medio de dos materiales isotrópicos estratificados (López-Acosta, 2010).

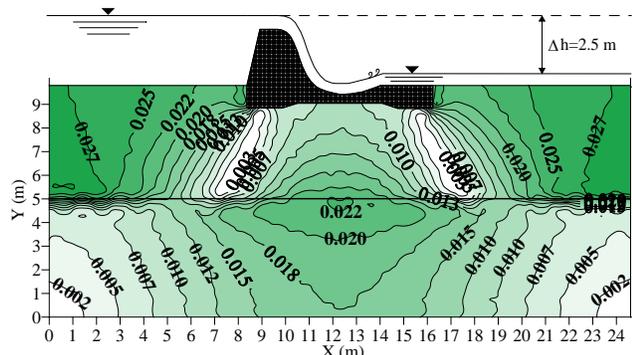


Figura 14. Desviación estándar en el gradiente hidráulico (adimensional) bajo un cimacio en un medio de dos materiales isotrópicos estratificados (López-Acosta, 2010).

4 PROGRAMAS DE COMPUTADORA Y RECOMENDACIONES GENERALES PARA DISTINTOS TIPOS DE ANÁLISIS

En la actualidad, las técnicas numéricas se prefieren con una frecuencia creciente debido a su capacidad para resolver problemas complejos en los que las ecuaciones (2) y (5) pueden generalizarse a medios heterogéneos con materiales anisótropos y condiciones de frontera de complejidad variable (Lam et al., 1987; Auvinet y López-Acosta, 2010). La metodología general para realizar un análisis de flujo establecido o transitorio se ilustra en la Figura 15. En la misma, se puede apreciar que uno de los datos más importantes para llevar a cabo un análisis de

flujo de agua son los parámetros hidráulicos de los materiales, los cuales deben obtenerse de pruebas de campo o de laboratorio, mismas que en la práctica común no se realizan, ya sea por tiempo, por costo o porque algunos tipos de ensayos requieren personal y equipo más especializado. Por ejemplo, las pruebas para determinar los parámetros hidráulicos de materiales en estado parcialmente saturado: contenido de agua volumétrico, succión, etc. Las funciones hidráulicas necesarias para llevar a cabo el análisis de un suelo parcialmente saturado son:

- *Función de almacenamiento* (Fig. 23).- También conocida como función de retención de agua, o *curva característica*, dependiendo de si la succión se expresa en términos del grado de saturación o del contenido de agua volumétrico, respectivamente.

- *Función de conductividad hidráulica* (Fig. 24).- También conocida como función de permeabilidad, y representa la succión en función de la permeabilidad

En las Figuras 16 y 17 se presentan algunas consideraciones generales para distintos tipos de análisis de flujo de agua, los cuales, pueden realizarse en la actualidad con relativa facilidad y rapidez mediante alguno de los algoritmos existentes para ello. El esquema de la Figura 18 resume los programas más conocidos empleados para la solución numérica de problemas de flujo de agua. Una virtud de los programas de computadora es que facilitan el estudio del flujo transitorio, y/o del estado parcialmente saturado de los suelos, casos que intentar resolverlos de forma analítica resulta complicado y laborioso.

Varios programas para análisis de flujo de agua consideran sistemas de clasificación de suelos diferentes al SUCS (Sistema Unificado de Clasificación de Suelos), debido a que todos estos sistemas involucran parámetros que se utilizan en el estudio de los suelos parcialmente saturados, tales como:

- HYPRES database = HYdraulic PROperties of European Soils.
- U.S.D.A. = United States Department of Agriculture.
- STARING = Dutch 'Winand Staring Soil Series'.

Los sistemas anteriores implican que no es recomendable utilizar solamente los parámetros que de forma automática incluyen los programas para determinados tipos de materiales (arenosos, arcillosos, limosos, etc.), por las características de los suelos que manejan (europeos, de Estados Unidos u holandeses). Siendo preferible que el usuario asigne los parámetros hidráulicos necesarios en función del tipo de análisis a efectuar, pero obtenidos de pruebas de laboratorio o de campo realizadas directamente en los materiales de la estructura térrea o suelo en estudio. Para solucionar este inconveniente, en años recientes se ha

implementado una amplia base de datos con parámetros hidráulicos de distintos tipos de suelos de todo el mundo (SOILVISION, SoilVision Systems Ltd., 2011). Adicionalmente, algunos algoritmos (SVFlux, SoilVision Systems Ltd., 2014) permiten introducir las curvas granulométricas así como las propiedades índice de los materiales de la región de flujo de interés, y mediante distintas expresiones matemáticas estimar las funciones hidráulicas necesarias para los análisis (Figs. 23 y 24). Los principales modelos matemáticos que permiten obtener las funciones hidráulicas de los suelos son (Mendoza, 2014):

- Para la *curva característica*.- Brooks y Corey (1964); Van Genuchten (1980); Fredlund y Xing (1994); modelo de Aubertin *et al.* 2003 (modificado de Kovacs, 1981).
- Para la *función de conductividad hidráulica*.- Brooks y Corey (1964); Van Genuchten (1980); Fredlund y Xing (1994).

Las Figuras 22 a 27 presentan un caso de análisis del flujo de agua a través de una presa de materiales graduados considerando que en una parte de la misma el suelo está parcialmente saturado (Mendoza, 2014).

El algoritmo PLAXFLOW (Delft University of Technology, 2007), permite resolver mediante el método de elementos finitos problemas de flujo transitorio por medio de la solución aproximada de la ecuación (5), y representando el flujo en suelos parcialmente saturados con el modelo de *Van Genuchten*. Este algoritmo realiza los análisis de flujo transitorio de dos formas diferentes (Fig. 19): a) Por etapas o fases (*'step-wise conditions'*): cada fase está definida por condiciones de frontera constantes, esto es, en cada una se considera un determinado nivel de la superficie del agua correspondiente a

cierto tiempo, o bien b) Con condiciones dependientes del tiempo (*'time-dependent conditions'*): se considera explícitamente la variación continua en función del tiempo de los niveles de agua, la cual puede representarse con funciones lineales, armónicas o los datos particulares de variación de niveles introducidos mediante tablas.

Algunos resultados de análisis de vaciado de agua realizados con los algoritmos SEEP/W (GEO-SLOPE International, Ltd., Calgary, Alberta, Canada) y PLAXFLOW (Delft University of Technology, 2007), se ilustran en las Figuras 20 y 21, respectivamente (Sánchez-Solís, 2013; Auvinet y López-Acosta, 2010).

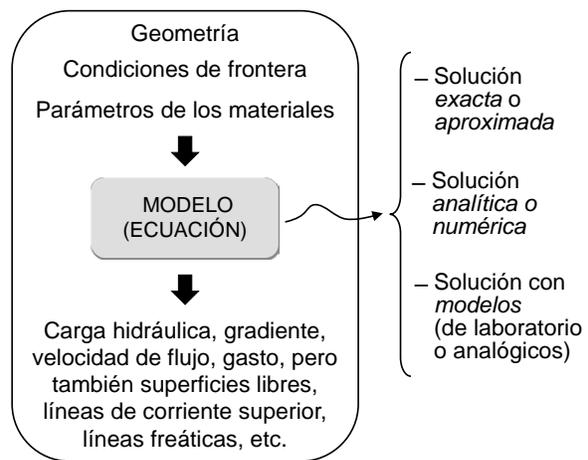


Figura 15. Metodología general para realizar un análisis de flujo establecido o transitorio.

Generalmente es el usuario quien debe limitar la región de flujo.

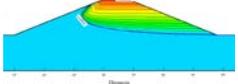
Geometría		
Parámetros de los materiales	Depende del análisis	<ul style="list-style-type: none"> - Flujo de agua establecido k_{sat} - Flujo de agua transitorio $k_{rel}(\theta)$, grado de saturación, porosidad, tiempo, volumen de recarga o extracción. - Estabilidad de taludes k_{sat} ó $k_{rel}(\theta)$, c', ϕ' - Flujo de agua en pozos de extracción con cálculo de hundimiento k_{sat} transmisividad, coeficiente de almacenamiento, coeficiente de consolidación, tiempo de inyección o extracción.
Condiciones de frontera	<ol style="list-style-type: none"> 1. Condiciones de <i>Dirichlet</i>: → Nivel piezométrico conocido en la frontera. 2. Condiciones de <i>Neuman</i>: → Flujo conocido en la frontera. 	<p style="text-align: center;">h</p> <p style="text-align: center;">q</p>

Figura 16. Datos para un análisis de flujo de agua.

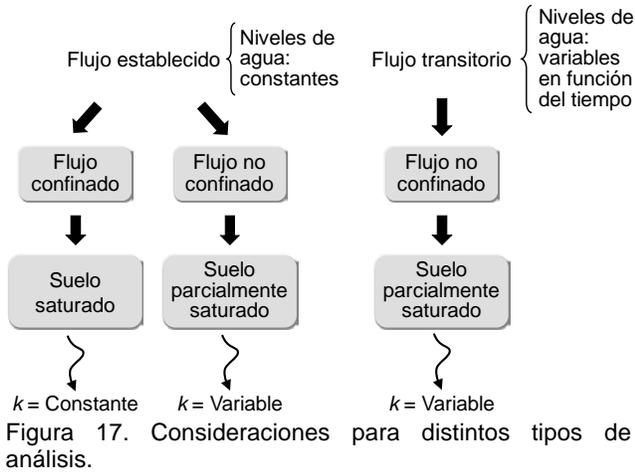


Figura 17. Consideraciones para distintos tipos de análisis.

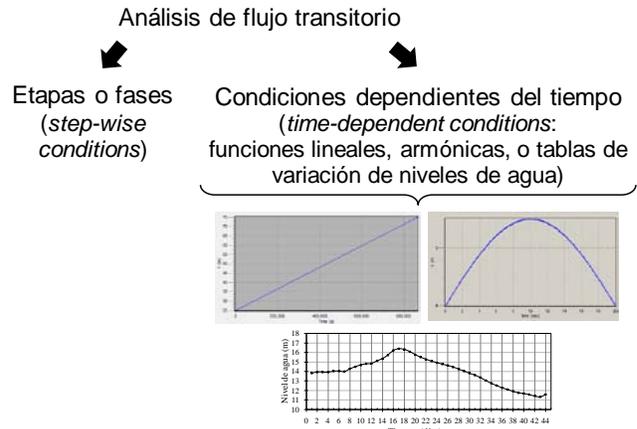


Figura 19. Tipos de análisis de flujo transitorio con el algoritmo PLAXFLOW (Delft University of Technology, 2007).

Elementos finitos	PLAXFLOW (Delft University of Technology 2007)	Flujo establecido y transitorio (2D)	Suelos saturados y parcialmente saturados
	SEEP/W (GEO-SLOPE International, Ltd, Calgary, Alberta, Canada)	Flujo establecido y transitorio (2D)	
	SVFlux (SoilVision Systems LTD, Universidad Saskatchewan, Canadá, 1997)	Flujo establecido y transitorio (1D, 2D, 3D)	
Diferencias finitas	FLAC3D (ITASCA Consulting Group Inc. 2009)	Flujo establecido y transitorio (3D)	
	Visual MODFLOW 2009.1 Premium (Schlumberger, 2009)	Flujo establecido y transitorio (3D)	

Figura 18. Algunos algoritmos conocidos para modelado numérico de flujo de agua.

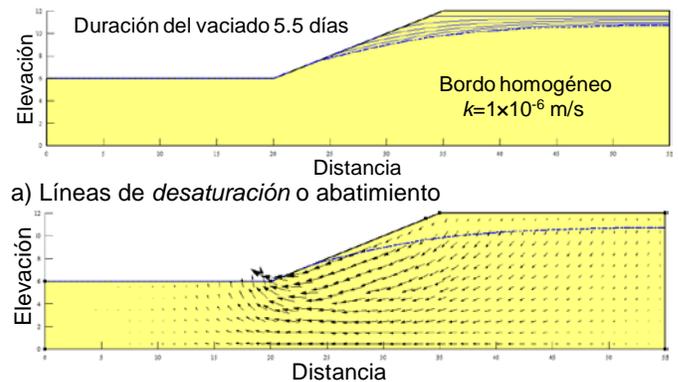


Figura 20. Resultados de un análisis de vaciado (Sánchez-Solís, 2013) con el algoritmo SEEP/W (GEO-SLOPE International, Ltd, Calgary, Alberta, Canada).

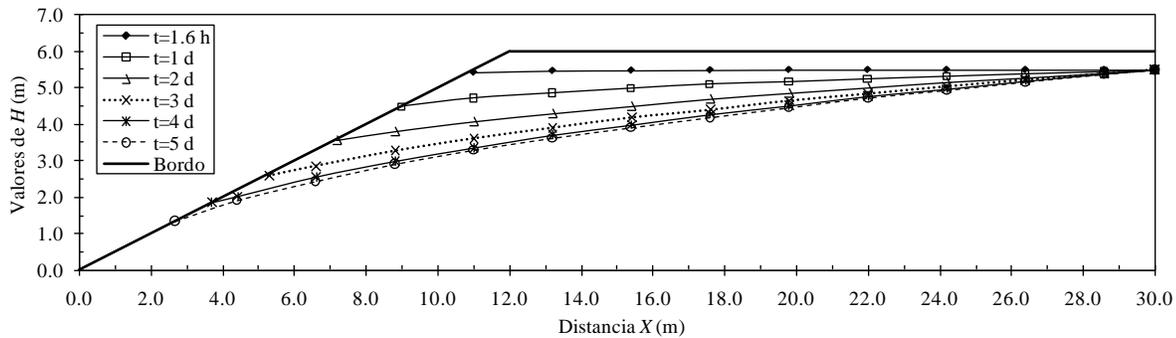


Figura 21. Líneas de desaturación o abatimiento para diferentes instantes durante un vaciado (Auvinet y López-Acosta, 2010), obtenidas con el algoritmo PLAXFLOW (Delft University of Technology, 2007).

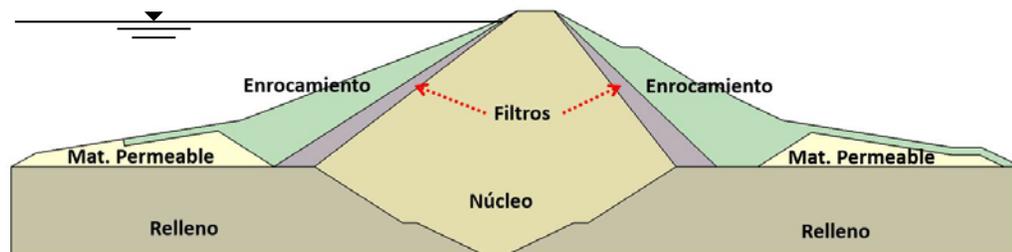


Figura 22. Geometría y materiales de la presa Álvaro Obregón (El Oviachic), Sonora (Mendoza, 2014).

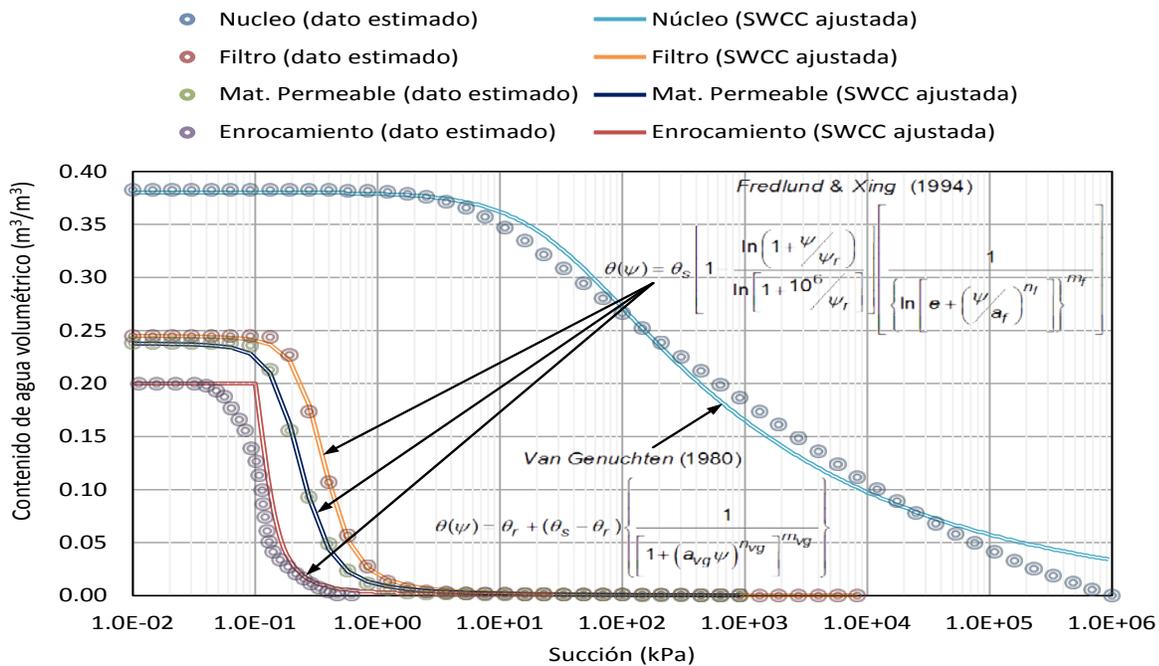


Figura 23. Curvas características de los materiales de la presa *El Oviachic* empleadas en el análisis (Mendoza, 2014).

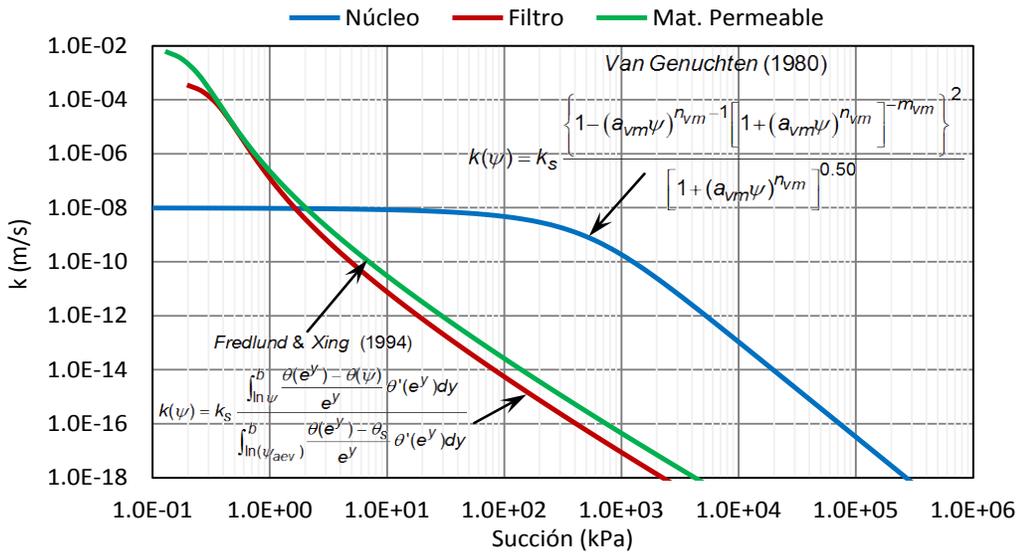


Figura 24. Funciones de conductividad hidráulica utilizadas en el modelo numérico de la presa *El Oviachic* (Mendoza, 2014).

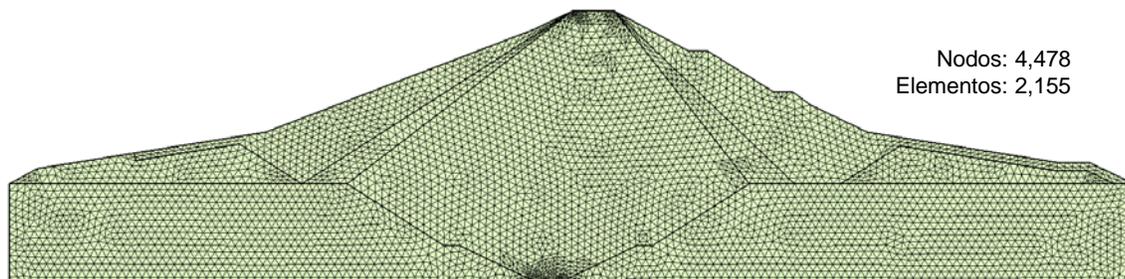


Figura 25. Malla de elementos finitos (Mendoza, 2014), generada con el algoritmo SVFlux (Thode y Gitirana, SoilVision Systems Ltd., 2014).

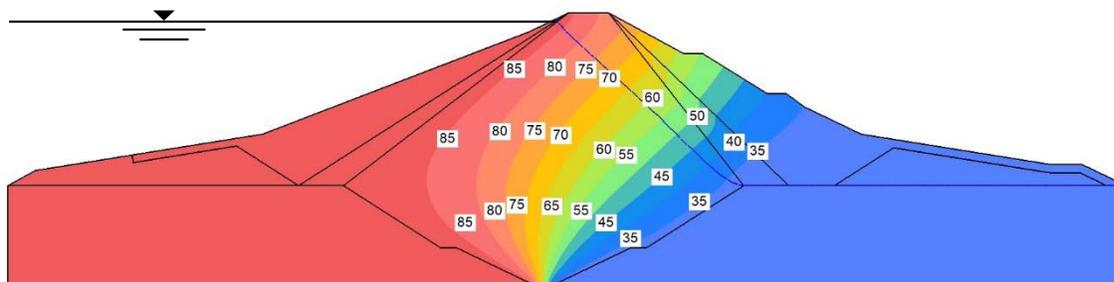


Figura 26. Distribución de carga hidráulica (Mendoza, 2014), calculada con el algoritmo SVFlux (Thode y Gitirana, SoilVision Systems Ltd., 2014).

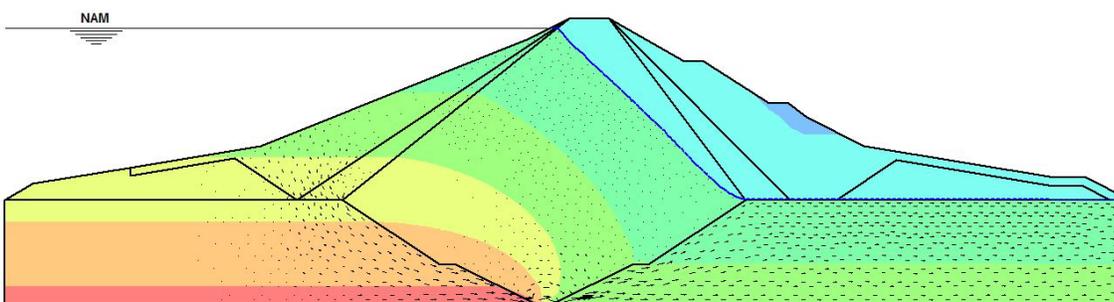


Figura 27. Magnitud resultante de los vectores de velocidad (Mendoza, 2014), obtenida con el algoritmo SVFlux (Thode y Gitirana, SoilVision Systems Ltd., 2014).

5 CONCLUSIONES

En la actualidad, las técnicas numéricas se prefieren con una frecuencia creciente debido a su capacidad para resolver problemas complejos en los que las ecuaciones para análisis de flujo de agua pueden generalizarse a medios heterogéneos con materiales anisótropos y condiciones de frontera de complejidad variable. Sin embargo, los análisis más sofisticados requieren del empleo de un mayor número de parámetros de los materiales, lo que implica la realización de pruebas de campo y de laboratorio que requieren de un conocimiento y personal más especializado. Una ventaja es que hoy en día, existen una serie de modelos matemáticos que permiten estimar de forma aproximada tales parámetros de los materiales. No obstante, es recomendable que los resultados obtenidos de los análisis numéricos se comparen con las mediciones resultantes de un monitoreo (instrumentación en campo) de las estructuras en estudio.

Algunos comentarios importantes referentes a los análisis numéricos de flujo de agua son:

- En los análisis de flujo de agua en 3D, se ha observado que el empleo de ecuaciones en términos de diferencias finitas consume menos tiempo de cálculo en comparación con el método de elementos finitos 3D.
- Los programas de computadora facilitan el estudio del flujo transitorio, y/o del estado parcialmente saturado de los suelos, casos que intentar

resolverlos de forma analítica resulta complicado y laborioso.

- Ningún programa de computadora sustituye el buen juicio de un ingeniero.

REFERENCIAS

- Allen, N. de G. (1954) Relaxation methods in engineering and science. First Edition. Mc. Graw Hill Inc., United States, 257 pp.
- Auvinet, G. (1975). Técnicas de Monte Carlo, Cap. VI del Libro: Presas de tierra y enrocamiento, pp. 123-131, Editado por R. J. Marsal y D. Reséndiz, Edit. LIMUSA, México.
- Auvinet, G. y López-Acosta, N. P. (2010). Condición de vaciado rápido en taludes sumergidos, Libro: 15 Presentaciones de amigos y colegas en el Homenaje al Ing. Jesús Alberro Aramburu, Edición de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica y del Instituto de Ingeniería de la UNAM, pp. 167-189.
- Baiocchi, C. (1971) "Sur un problème a frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux", C.R. Acad. Sci. Paris 273, pp. 1215-1217.
- Bardet, J.P. y Tobita, T. (2002) "A practical method for solving free-surface seepage problems". *Computers and Geotechnics*. Vol. XXIX, pp. 451-475.
- Brezis, H., Kinderlehrer, D. y Stampacchia, G. (1979) "Sur une nouvelle formulation du problème de

- l'écoulement à travers une digue". Serie A. Paris: C. R. Academie des Sciences.
- Espinoza, R. D. (1993). Numerical Analysis of Unsaturated Flow. PhD. Thesis. Faculty of Purdue University, Indiana, U.S.A.
- Finnemore, E.J. y Perry, B. (1968) "Seepage through an earth dam computed by the relaxation technique". Water Resources Research, Vol. IV, pp. 1059-1067.
- Flores, R. (2000) Flujo de agua a través de suelos, Avances en Hidráulica 4, Cuarta Edición, Asociación Mexicana de Hidráulica e Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México.
- Fredlund, D.G. y Morgenstern, N.R. (1976). Constitutive Relations for Volume Change in Unsaturated Soils. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 13: 261-276.
- Fredlund, D. G. y Morgenstern, N. R. (1977). Stress State Variables for Unsaturated Soils. ASCE, Vol. 103: 447-464.
- González, J. L. y López-Acosta, N. P. (2014). "Aplicación de la Técnica de Sobre-relajación Sucesiva a problemas de flujo de agua confinado y no confinado." Memorias de la XXVII Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica. SMIG. (20-21 Noviembre 2014) Puerto Vallarta, Jalisco, México.
- Harr, M. E. (1962) Groundwater and seepage, Dover Publications, INC.
- Juárez-Badillo, E. y Rico, A. (1972) Mecánica de suelos. Tomo III Flujo de agua en suelos, Editorial LIMUSA, México, D.F.
- Lam, L., Fredlund, D.G. y Barbour, S. L. (1987). "Transient seepage model for saturated-unsaturated soil systems: a geotechnical engineering approach." Canadian Geotech. J. 24: 565-580.
- López-Acosta, N. P. (2010). "Incertidumbre en el análisis de flujo de agua en suelos." Tesis de Doctorado (con Mención Honorífica). División de Estudios de Posgrado. Facultad de Ingeniería UNAM. México, D.F. 311 p. Director de tesis: Gabriel Auvinet Guichard.
- López-Acosta N.P. y Auvinet G. (2012). "Capítulo B.2.4 Comportamiento de suelos parcialmente saturados y aplicaciones". Manual de Diseño de Obras Civiles. Comisión Federal de Electricidad (CFE). Informe del Instituto de Ingeniería de la UNAM elaborado para CFE (*en impresión*). México, D.F.
- López-Acosta, N.P. y González, J. L. (2014) "Study of water flow in dams with successive overrelaxations", sometido a una revista indizada (en proceso de arbitraje).
- Marsal, R. J. y Reséndiz, D. (1968). Análisis de flujo de agua, Cap. 6 del Libro: "Fundamentos del diseño y construcción de presas de tierra y enrocamiento", Publicación N° 183 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Mendoza-Promotor, J. A. (2014). Contribución a los análisis de flujo de agua en suelos parcialmente saturados. Tesis de licenciatura. Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura IPN. México D. F., México (Director de Tesis: N.P. López-Acosta).
- Mishra, G. C. y Singh, A. K. (2005). Seepage through a levee, Technical Notes, International Journal of Geomechanics, ASCE, Vol. 5, No. 1, pp. 74-79.
- PLAXFLOW Version 1.6 (2008). Scientific Manual, Edited by R.B.J. Brinkgreve. Delft University of Technology and Plaxis bv. R. Al-Khoury, Plaxis bv and J.M. van Esch, GeoDelft. The Netherlands.
- Panov, D. J. (1963). Formulas for the Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Method of Differences, FREDERICK UNGAR PUBLISHING CO., New York.
- Polubarinova-Kochina, P Y A (1962) Theory of the motion of groundwater, Chap.3, Princeton University Press.
- Reddi L. N. (2003) Seepage in soils: principles and applications, John Wiley y Sons Inc.
- Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous medium. Journal of Physics (1): 318-333.
- Sánchez-Solís, M. A. (2013) "Comportamiento hidromeccánico de bordos bajo condiciones de flujo transitorio". Tesis de Maestría en Ingeniería. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería de la UNAM (Director de Tesis: N.P. López-Acosta).
- SEEP/W-2007 (2008). Scientific Manual: Seepage modeling with SEEP/W 2007. An Engineering Methodology, Third Edition, GEO-SLOPE International, Ltd, Calgary, Alberta, Canada.
- Shehata, A. K. (2006). Design of downstream blanket for overflow spillway founded on complex formations, Journal of Applied Sciences Research, 2(12), pp. 1217-1227.
- SOILVISION (2011). A Knowledge-Based Database System For Saturated/Unsaturated Soil Properties. Theory Manual. (Ed. M. Fredlund). Saskatoon, Saskatchewan, Canada: SoilVision Systems Ltd.
- Spiegel, M. R. (1964). Theory and Problems of Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and its Applications, SCHAUM PUBLISHING CO., New York.
- SVFLUX (2014). Saturated/Unsaturated Finite Element. 2D/3D Seepage Modeling. Theory Manual by R. Thode y G. Gitirana (Ed. M. Fredlund). Saskatoon, Saskatchewan, Canada: SoilVision Systems Ltd.
- Ward W H y Pender M J (1981) "Tunnelling in soft ground. General Report", Proc. 10th Int. Conf. S. Mech. Found Engng., Stockholm, Vol. 4, 261-275.
- Young, D. (1950) Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Ph. D. dissertation. Massachusetts, Harvard University, 74 pp.