

Aplicación de la técnica de Sobre-relajación Sucesiva a problemas de flujo de agua confinado y no confinado

Application of the Successive Overrelaxation technique to confined and unconfined water flow problems

José León GONZÁLEZ¹ y Norma Patricia LÓPEZ-ACOSTA²

¹Becario Post-Maestría, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

²Investigadora, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

RESUMEN: El objetivo de este artículo es implementar y mostrar la aplicabilidad de una técnica numérica para solucionar problemas de flujo confinado y no confinado que comúnmente se presentan en la ingeniería geotécnica. Esta técnica, conocida como *Sobre-relajaciones Sucesivas (SOR, Successive Overrelaxation)*, permite obtener soluciones rápidas y precisas de problemas de flujo estacionario conociendo únicamente las condiciones hidráulicas de frontera del problema, su geometría y los parámetros hidráulicos del suelo. Inicialmente, se proporciona un breve resumen sobre las bases teóricas del método *SOR*. Se recuerda cómo la ecuación de Laplace puede resolverse aplicando diferencias finitas, y se muestra cómo esta solución puede modificarse convenientemente para convertirla en un método iterativo (*SOR*) que permite resolver problemas de flujo de agua confinado y no confinado. Posteriormente, se demuestra la aplicabilidad de la técnica *SOR* mediante la solución de varios ejemplos prácticos de flujo de agua. Se sugiere una metodología, por medio de hojas de cálculo, para optimar el tiempo de análisis y obtener soluciones con una aproximación adecuada para fines prácticos. Finalmente, se presentan comentarios sobre los cálculos realizados y las soluciones obtenidas, remarcando las ventajas y precauciones que deben tenerse en cuenta al aplicar el método numérico de *Sobre-relajaciones Sucesivas*.

ABSTRACT: The aim of this paper is implementing and showing the applicability of a numerical technique to solve confined and unconfined water flow problems that commonly appear in geotechnical engineering. This technique, known as the *Successive Overrelaxation (SOR)*, allows obtaining precise and quick solutions of steady-state flow problems only knowing the boundary hydraulic conditions, the geometry of the problem and the hydraulic soil parameters. Initially, a short summary about the theoretical basis of the *SOR* method is provided. It is reminded how the Laplace's equation can be solved applying finite differences, and it is shown how this solution can be conveniently modified to turn it into an iterative method (*SOR*) that allows solving confined and unconfined water flow problems. Afterward, the applicability of the *SOR* method by means of the solution of several practical water flow examples is demonstrated. A methodology, through spreadsheets, to optimize the analysis time and obtain solutions with an adequate approximation for practical purposes is suggested. Finally, comments about the calculations and obtained results are presented, remarking the advantages and precautions that need to be considered when this numerical method of *Successive Overrelaxation* is applied.

1 INTRODUCCIÓN

El método de *Sobre-relajaciones Sucesivas (Successive Overrelaxation, SOR)* es una técnica numérica poderosa y relativamente simple, con la cual, es posible resolver problemas de flujo de agua. Una de sus ventajas es que puede implementarse fácilmente en hojas de cálculo, resultando un método de análisis ilustrativo, práctico y al alcance de cualquier ingeniero geotecnista, porque no requiere del uso de sofisticados programas comerciales.

Para solucionar un problema de flujo de agua en un medio poroso mediante el método *SOR*, basta con conocer la geometría del problema (dimensiones y estratos), las condiciones hidráulicas de frontera (usualmente niveles de aguas arriba y de aguas

abajo), y los parámetros hidráulicos de los materiales (permeabilidades) del dominio de interés.

El método *SOR* se deriva del método clásico de relajaciones (Southwell, 1940), que resuelve la ecuación de Laplace en un punto (nodo) en particular con relación a los puntos en su entorno mediante una ecuación algebraica de diferencias finitas. Debido a que esta ecuación establece el cumplimiento de la Ley de Continuidad de flujo y de la Ley de Darcy, entonces, con su solución se obtiene la solución de la ecuación de Laplace en un punto determinado. De esta manera, si dicha ecuación se aplica a un gran número de puntos ubicados en la región de interés, problemas como el flujo de agua bajo una tablestaca o bajo una presa impermeable pueden ser resueltos de forma rápida y

sencilla. El método puede extenderse a la solución de problemas con condiciones de frontera más complejas (medios anisótropos, heterogéneos, problemas de superficie libre, entre otros).

El método clásico de relajaciones consiste en dibujar una malla cuadrículada en la región de flujo (homogénea e isotrópica), donde cada intersección representa un nodo. En aquellos nodos donde se desea calcular la carga o potencial hidráulico h se deben asignar valores aproximados de h , respetando los potenciales h conocidos en las fronteras de flujo. Los valores que se asignan en los nodos, pueden ser cero o el resultado de una estimación razonable, en este último caso, deben estar comprendidos entre los valores de frontera (que generalmente corresponden a los niveles de aguas arriba y aguas abajo del problema que se trate). Una forma de verificar que los potenciales h establecidos en los nodos son correctos, es mediante la *técnica del residuo* (Juárez-Badillo y Rico, 1972), la cual, consiste en obtener la diferencia de carga hidráulica entre un nodo central y los nodos que lo rodean. Si esta diferencia es igual a cero en todos los nodos, entonces los valores de h impuestos son correctos, en caso contrario, resulta necesario modificarlos tantas veces hasta que el residuo en todos los nodos sea cero, lo cual, indica el cumplimiento de la ecuación de Laplace en el dominio de estudio, y por tanto, que el problema de flujo está resuelto. Una desventaja del método de relajaciones es que se fundamenta en asignar valores arbitrarios en los nodos de la malla de estudio, ocasionando que difícilmente en una primera etapa de cálculo los residuos en los nodos sean cero, por lo que, generalmente resultan necesarias etapas adicionales de reasignación de valores, haciendo que el método se vuelva largo y laborioso para fines prácticos.

Mediante la técnica SOR (Young, 1950), que constituye una mejoría del método clásico de relajaciones, el proceso de refinamiento del residuo en los nodos se vuelve automático a través de toda la retícula, debido a que utiliza el método iterativo de Gauss-Seidel, con el que es posible obtener residuos de cero o prácticamente cero en todos los nodos, permitiendo solucionar problemas de flujo de agua con relativa rapidez y sencillez (Allen, 1954, Finemore, 1968). Adicionalmente, una ventaja muy importante del método SOR es que permite la solución de los denominados *problemas de superficie libre* (o de flujo no confinado), en los que se debe determinar la posición de la superficie libre (freática) como parte de la solución del problema. Para este tipo de problemas se han desarrollado otras mejoras al método SOR: a) Solución de Baiocchi (1971), y b) Método de la de Presión Extendida (Brezis *et al.*, 1978, Bardet y Tobita, 2002). El primero, permite determinar la posición de la superficie freática (línea de corriente superior para flujo establecido) en un medio homogéneo, y el

segundo, ayuda a establecer esta línea tanto en medios homogéneos como heterogéneos.

A continuación, se recuerda cómo la ecuación de Laplace puede resolverse por medio de series de Taylor para llegar al método clásico de relajaciones. Posteriormente, se exponen los fundamentos teóricos de la técnica de *Sobre-relajaciones Sucesivas (SOR)* y del método de la *Presión Extendida*. Después, con la ayuda de varios ejemplos prácticos, se explica cómo deben aplicarse estos métodos. Finalmente, se presentan comentarios sobre los problemas resueltos y las soluciones obtenidas, remarcando las ventajas y precauciones que deben tenerse en cuenta al emplear la técnica SOR.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Método clásico de relajaciones

La ecuación de Laplace, definida como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

donde: $\phi(x,y,z)$ = función de potencial hidráulico, generalmente puede resolverse de forma analítica cuando el problema de flujo y sus condiciones de frontera son muy sencillas, lo cual, no ocurre en la realidad. Por este motivo, comúnmente se utilizan soluciones aproximadas obtenidas por ejemplo con: redes de flujo, elementos finitos, diferencias finitas, métodos iterativos, modelos físicos de laboratorio, modelos analógicos, entre otros.

En este artículo, la solución de la ecuación de Laplace se determina aplicando series de Taylor a la función de potencial hidráulico ϕ , derivando primero con respecto a X (Mitchell y Griffiths, 1980):

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x_1^2 \quad (2)$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x_2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x_2^2 \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) representan la variación de la magnitud de la función de potencial hidráulico en la dirección X de un punto $\phi_{i,j}$ con relación a dos puntos $\phi_{i-1,j}$ y $\phi_{i+1,j}$ separados una distancia Δx_1 y Δx_2 , respectivamente. Sumando las ecuaciones (2) y (3), y considerando además que $\Delta x_1 = \Delta x_2$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j}) \quad (4)$$

De forma similar, es posible determinar la derivada parcial de la ecuación de Laplace con respecto a Y :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j}) \quad (5)$$

Sustituyendo las expresiones (4) y (5) en la ecuación (1), y despejando $\phi_{i,j}$, se llega a:

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \lambda^2 (\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j})}{2(1 + \lambda^2)} \quad (6)$$

donde: $\lambda^2 = \Delta x^2 / \Delta y^2$.

La ecuación (6) es la aproximación a la solución de la ecuación de Laplace en el punto $\phi_{i,j}$ del dominio de flujo, la cual, está en función de los puntos $\phi_{i,j+1}$, $\phi_{i,j-1}$, $\phi_{i+1,j}$ y $\phi_{i-1,j}$ que están a su alrededor, y se conoce como la *ecuación básica del método clásico de relajaciones*. De manera análoga, es posible obtener la solución de la ecuación de Laplace expresada en términos de diferencias finitas para puntos ubicados en distintas fronteras de flujo dentro del problema de estudio. Algunas de las soluciones más comunes son:

$$\phi_{i,j} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}) + \phi_{i+1,j}}{2} \quad (7)$$

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i,j-1} + (\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j})\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \quad (8)$$

$$\phi_{i,j} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j}) + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j}}{3} \quad (9)$$

La ecuación (7) representa la solución aproximada de la ecuación de Laplace de un nodo ubicado en una frontera vertical impermeable, la ecuación (8) se refiere a un nodo ubicado en una frontera horizontal impermeable, y la ecuación (9) corresponde a un nodo ubicado en una esquina exterior impermeable.

2.2 Método de Sobre-relajaciones Sucesivas (Successive Overrelaxation, SOR)

El método de *Sobre-relajaciones Sucesivas* utiliza el método iterativo de Gauss-Seidel, permitiendo que las ecuaciones generales del método clásico de relajaciones se resuelvan cíclicamente sin la necesidad de introducir manualmente valores de la función de potencial hidráulico ϕ . Esta técnica considera adicionalmente un *factor de relajación* α que ayuda a que el método converja más rápidamente (Young, 1950). Para obtener las ecuaciones generales del método SOR, se debe proseguir como se indica a continuación (Young, 1950, Wang y Anderson, 1982).

Se considera el residuo resultante c después de dos iteraciones de Gauss-Seidel en un mismo nodo:

$$c = \phi_{i,j}^{m+1} - \phi_{i,j}^m \quad (10)$$

donde: m = número de iteración; $\phi_{i,j}^m$ = valor de la función de potencial en el nodo i,j en la iteración m ; y $\phi_{i,j}^{m+1}$ = valor de la función de potencial en el nodo i,j en la iteración $m+1$.

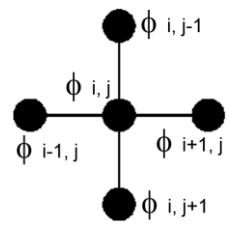
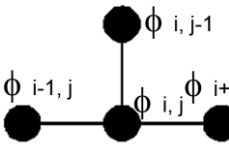
Despejando $\phi_{i,j}^{m+1}$ de la ecuación (10):

$$\phi_{i,j}^{m+1} = \phi_{i,j}^m + \alpha c \quad (11)$$

donde: α = factor de relajación. El factor de relajación debe estar comprendido en el rango $1 < \alpha < 2$, de lo contrario el método tardará en converger o simplemente no lo hará. Se recomienda utilizar $\alpha=1.7$ para una convergencia rápida (Salmasi y Azamathulla, 2013).

Finalmente, si se sustituye la ecuación (6) en la ecuación (10), y a su vez, en la ecuación (11), se obtiene la expresión (12), que constituye la *ecuación básica del método SOR* que se muestra en la Tabla 1 (Wang y Anderson, 1982). Al igual que en el método clásico de relajaciones, existen expresiones específicas en función de la ubicación del nodo y para distintas fronteras de flujo, las más usuales se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Ecuaciones básicas para la aplicación del método de *Sobre-relajaciones Sucesivas (SOR)*.

Ubicación del nodo	Esquema	Ecuación	No.
Central (interior)		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1 - \alpha)\phi_{i,j}^m + \alpha \frac{\phi_{i,j+1}^m + \phi_{i,j-1}^{m+1} + \lambda^2 (\phi_{i+1,j}^m + \phi_{i-1,j}^{m+1})}{2(1 + \lambda^2)}$	(12)
Frontera horizontal impermeable		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1 - \alpha)\phi_{i,j}^{m+1} + \frac{\alpha}{2(1 + \lambda^2)} [(\phi_{i+1,j}^m + \phi_{i-1,j}^{m+1}) + 2\lambda^2 \phi_{i,j-1}^{m+1}]$	(13)

Continuación Tabla 1. Ecuaciones básicas para la aplicación del método de *Sobre-relajaciones Sucesivas (SOR)*.

Ubicación del nodo	Esquema	Ecuación	No.
Frontera vertical impermeable		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^{m+1} + \frac{\alpha}{2(1+\lambda^2)} \left[(\phi_{i,j+1}^m + \phi_{i,j-1}^m) + 2\lambda^2\phi_{i+1,j}^m \right]$	(14)
Vértice exterior		$\phi_{i,j} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \alpha \frac{\lambda^2(2\phi_{i,j-1}^{m+1} + \phi_{i,j+1}^m) + (2\phi_{i+1,j}^m + \phi_{i-1,j}^{m+1})}{3(1+\lambda^2)}$	(15)
Intersección vertical entre dos materiales con distinta permeabilidad		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(1+\gamma)\left(\frac{1}{2}\right)(\phi_{i,j+1}^{m+1} + \phi_{i,j-1}^{m+1}) + \phi_{i-1,j}^{m+1} + \gamma\phi_{i+1,j}^m}{1+\gamma} \right)$	(16)
Intersección vertical entre dos materiales con distintas permeabilidades y una frontera horizontal impermeable		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(1+\gamma)\phi_{i,j-1}^{m+1} + \phi_{i-1,j}^{m+1} + \gamma\phi_{i+1,j}^m}{1+\gamma} \right)$	(17)
Intersección horizontal entre dos materiales con distinta permeabilidad		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(1+\gamma)\left(\frac{1}{2}\right)(\phi_{i-1,j}^{m+1} + \phi_{i+1,j}^{m+1}) + \phi_{i,j-1}^{m+1} + \gamma\phi_{i,j+1}^m}{1+\gamma} \right)$	(18)
Intersección horizontal entre dos materiales con distinta permeabilidad y una frontera vertical impermeable		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(1+\gamma)\phi_{i+1,j}^{m+1} + \phi_{i,j-1}^{m+1} + \gamma\phi_{i,j+1}^m}{1+\gamma} \right)$	(19)
Vértice en una tablestaca		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \alpha \frac{\phi_{i,j+1}^m + \phi_{i,j-1}^{m+1} + \lambda^2(\phi_{i+1,j}^m + \phi_{i-1,j}^{m+1})}{2(1+\lambda^2)}$	(20)
Vértice interior		$\phi_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)\phi_{i,j}^m + \alpha \frac{1}{2} (\phi_{i,j-1}^{m+1} + \phi_{i+1,j}^m)$	(21)

En las ecuaciones anteriores de la Tabla 1, γ es la relación de permeabilidades definida como $\gamma = k_2/k_1$, siendo k_1 la permeabilidad del material 1 y k_2 la permeabilidad del material 2.

2.3 Método de la Presión Extendida para resolver problemas de superficie libre (flujo no confinado)

Las ecuaciones anteriores del método *SOR* (Tabla 1) son aplicables al caso de problemas de flujo confinado, donde las condiciones hidráulicas de frontera son conocidas (agua-suelo infiltrado, suelo infiltrado-suelo no infiltrado, suelo infiltrado-aire, suelo infiltrado-suelo permeable no infiltrado; Marsal y Reséndiz, 1968). En el caso de problemas de superficie libre (flujo no confinado), las ecuaciones anteriores no pueden aplicarse directamente, debido a que la frontera suelo infiltrado-suelo permeable no infiltrado (superficie libre) no se conoce inicialmente, y debe determinarse previamente como parte de la solución.

En el caso de problemas de flujo no confinado en medios homogéneos e isotrópicos, se han desarrollado diversas soluciones analíticas y técnicas numéricas para definir la posición de la línea de superficie libre o línea freática (Dupuit, 1863, Kozeny, 1931, Cryer, 1970, Baiocchi, 1971). Las soluciones para medios heterogéneos son menos comunes. El método de la Presión Extendida fundamentado en la técnica *SOR* (Brezis *et al.*, 1978; Bardet y Tobita, 2002) permite definir la posición de la superficie libre cuando el medio está compuesto

por más de un material con distintas permeabilidades (medios heterogéneos).

El método de la Presión Extendida asume como incógnita la presión hidrostática p , en lugar de utilizar la función de potencial hidráulico ϕ (como se considera en el método clásico de relajaciones y en *SOR*), modificando la ley de Darcy de la siguiente forma:

$$v' = -k \cdot [\text{grad}(p) + H_\varepsilon(p) \text{grad}(y)] \quad (22)$$

donde: v' = velocidad de flujo; p = presión hidrostática; y = carga o presión de posición.

Adicionalmente:

$$H_\varepsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \varepsilon \\ p/\varepsilon & \text{si } p \leq \varepsilon \end{cases} \quad (23)$$

donde: ε = separación Δy entre dos nodos en la dirección Y .

La solución de la ecuación (22) puede expresarse como una ecuación lineal en términos de diferencias finitas de forma similar a los casos presentados en la Tabla 1 para el método *SOR*, sólo que en la técnica de la Presión Extendida se incluye la función $H_\varepsilon(p)$ (Bardet y Tobita, 2002). De esta manera, en la Tabla 2 se proporciona la aproximación de la solución de la ecuación de Laplace para distintas ubicaciones usuales de nodos en problemas de flujo no confinado (superficie libre) aplicando el método de la Presión Extendida.

Tabla 2. Ecuaciones básicas para la aplicación del método de la Presión Extendida.

Ubicación del nodo	Ecuación	No.
Central (interior)	$p_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)p_{i,j}^m + \frac{1}{4}\alpha \left(p_{i,j+1}^m + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i+1,j}^m + p_{i-1,j}^{m+1} + \Delta y \left[H_\varepsilon \left(\frac{p_{i,j}^m + p_{i,j-1}^{m+1}}{2} \right) - H_\varepsilon \left(\frac{p_{i,j}^m + p_{i,j+1}^m}{2} \right) \right] \right)$	(24)
Frontera horizontal impermeable	$p_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)p_{i,j}^m + \alpha \left(\frac{1}{4} (2p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i+1,j}^m + p_{i-1,j}^{m+1}) + \frac{\Delta y}{2} \right)$	(25)
Intersección vertical entre dos materiales con distinta permeabilidad	$p_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)p_{i,j}^m + \frac{1}{4}\alpha \left(2p_{i-1,j}^{m+1} + (1+\gamma)(p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^m) + 2\gamma p_{i+1,j}^m + \Delta y \left[H_\varepsilon \left[\frac{p_{i,j}^m + p_{i,j-1}^{m+1}}{2} \right] - H_\varepsilon \left[\frac{p_{i,j}^m + p_{i,j+1}^m}{2} \right] \right] \right)$	(26)
Intersección vertical entre dos materiales con distintas permeabilidades y una frontera horizontal impermeable	$p_{i,j}^{m+1} = (1-\alpha)p_{i,j}^m + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{p_{i-1,j}^{m+1} + (1+\gamma)p_{i,j-1}^{m+1} + \gamma p_{i+1,j}^m}{1+\gamma} + \Delta y H_\varepsilon \left[\frac{p_{i,j}^m + p_{i,j-1}^{m+1}}{2} \right] \right)$	(27)

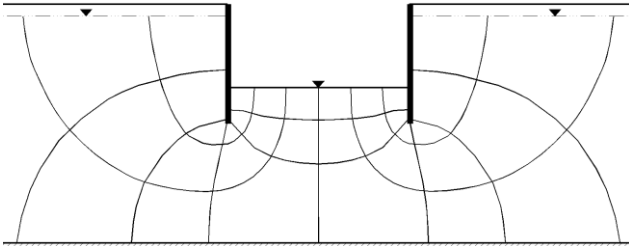


Figura 4. Solución numérica con el método SOR del problema de flujo de agua en el dominio con dos tablestacas impermeables.

3.1.2 Flujo en un terraplén homogéneo e isótropo

Se evalúa el flujo de agua a través del terraplén homogéneo e isótropo que se ilustra en la Figura 5. El problema se resuelve considerándolo como de flujo confinado, asumiendo que el medio está saturado debido al efecto de lluvias constantes, y que por tanto, la superficie del agua tiene valores conocidos en la corona y en el talud del terraplén. Las condiciones de frontera en este caso son: a) agua-suelo infiltrado (corona del terraplén), b) suelo infiltrado-aire (taludes del terraplén), y c) suelo infiltrado-suelo impermeable (interfaz suelo impermeable-suelo permeable).

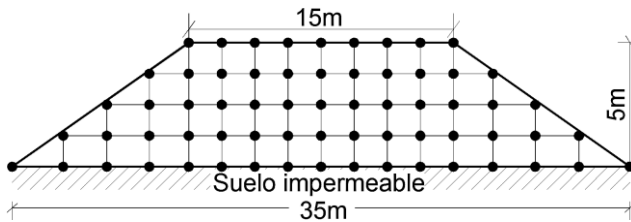


Figura 5. Geometría y arreglo esquemático de nodos en un terraplén homogéneo e isótropo.

El análisis se lleva a cabo con la técnica SOR, considerando que el gasto que entra por la corona del terraplén es igual al que sale dividido entre dos en cada uno de los taludes del terraplén. En la Figura 5 se muestra el arreglo esquemático de los nodos de la malla con la que se estudia la zona de flujo. En este problema se utilizan las ecuaciones para nodos: central (interior) y frontera impermeable horizontal de la Tabla 1. La corona y los taludes del terraplén tienen potencial ϕ impuesto.

Al igual que en el inciso anterior, la solución a este problema se implementó en una hoja de cálculo, que permite obtener inicialmente los valores de los potenciales hidráulicos ϕ que no se conocen en los nodos de la malla empleada en el análisis, y posteriormente, los valores de la función de corriente ψ . El conjunto de resultados constituye la red de flujo

que se muestra en la Figura 6. De la misma, se aprecia que la técnica SOR permite obtener, de forma muy sencilla y rápida, una red de flujo (por computadora) con muy buena aproximación para fines prácticos.

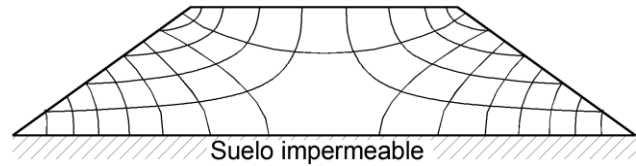


Figura 6. Solución numérica mediante el método SOR del problema de flujo en un terraplén homogéneo e isótropo.

3.1.3 Flujo en el suelo de cimentación heterogéneo debajo de una presa impermeable

En la Figura 7 se muestra una presa impermeable cimentada sobre un suelo constituido por una serie de estratos horizontales, y dos pantallas impermeables como ahí se indica.

El análisis del flujo de agua a través de la cimentación de esta presa se realiza con el método SOR. En este caso, los nodos ubicados en la interfaz de cada dos estratos están regidos por la ecuación (18) de la Tabla 1. Expresiones para las otras ubicaciones de nodos de este problema (central interior, frontera horizontal impermeable, vértice en una tablestaca, etc.) se consideran de la Tabla 1.

El problema se resuelve programando las ecuaciones necesarias del método SOR en una hoja de cálculo, y siguiendo el mismo procedimiento que se señaló en los incisos anteriores: a) primero se calculan los potenciales ϕ , y b) posteriormente se obtienen los valores de la función de corriente ψ . La solución numérica de este problema mediante una red de flujo por computadora se proporciona en la Figura 8. El dibujo a mano de una red de flujo resulta relativamente sencillo en el caso de un medio homogéneo e isótropo, no así, para un medio heterogéneo. Se reconoce entonces, la utilidad, rapidez y facilidad de aplicación del método SOR en la solución de problemas de flujo de agua más complejos. Como ya se mencionó antes, este método puede igualmente extenderse al caso de materiales anisótropos.

En todos los problemas aquí expuestos, también es posible evaluar los gradientes hidráulicos, las velocidades de flujo y el gasto con expresiones en términos de diferencias finitas, fundamentadas en el método SOR (López-Acosta y González, 2014), similares a las empleadas en este artículo.

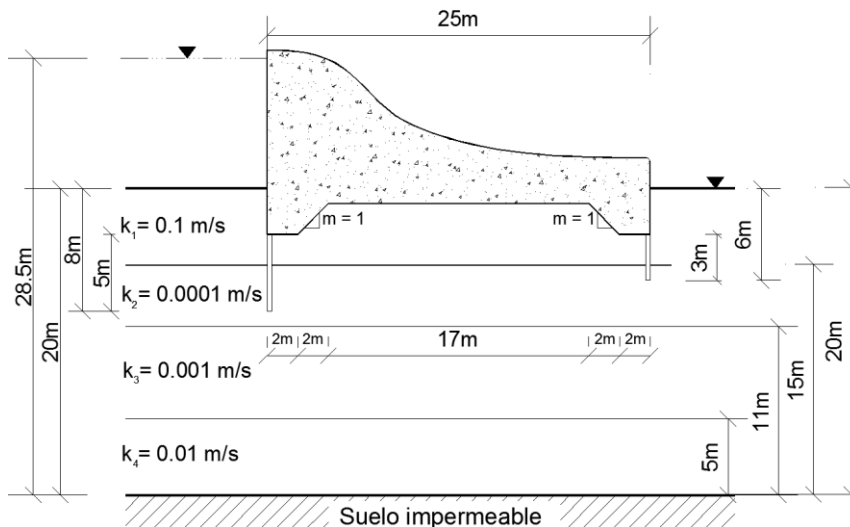


Figura 7. Presa impermeable cimentada sobre un suelo con estratos de distintas permeabilidades.

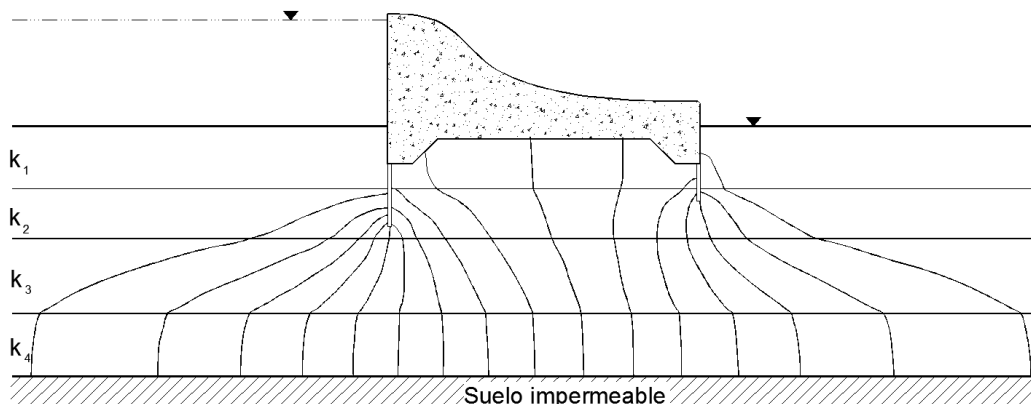


Figura 8. Solución numérica con el método SOR al problema de flujo de agua en un suelo estratificado bajo una presa impermeable.

3.2 Problema de flujo no confinado

Se estudia la presa de tierra que se muestra en la Figura 9, la cual, está constituida por cuatro materiales: a) el primero (aguas arriba), se trata de un relleno limo-arenoso, b) el segundo, en el núcleo de la estructura, está constituido por arcilla de baja permeabilidad, c) el tercero (aguas abajo), es un limo-arcilloso de permeabilidad media, y d) el último es un filtro (triangular) de arena de alta permeabilidad. La presa está conteniendo un tirante de agua de 7.6m de altura en la parte de aguas arriba. La relación entre las permeabilidades del primer material y el núcleo es $k_2/k_1 = 0.01$, mientras que la relación de permeabilidad entre el material del núcleo y el material de aguas abajo es $k_3/k_2 = 10$. El cuarto material no se considera en los análisis debido a que tiene una permeabilidad alta (la presión hidrostática en este material es cero).

Por tratarse de un problema de superficie libre, la solución se obtiene en dos fases: a) Etapa 1: aplicación del método de la *Presión Extendida* (inciso

2.3) para determinar la posición de la superficie freática, y b) Etapa 2: aplicación del método SOR para finalizar la solución del problema como uno de flujo confinado.

En la Figura 10 se muestra el arreglo esquemático de los nodos dentro de la zona de flujo para resolver el problema. En este caso, los nodos localizados en el primer y segundo material tienen una separación $\Delta x = 0.8m$ y $\Delta y = 0.4m$, mientras que los nodos localizados en el núcleo tienen una separación de $\Delta x = 0.2m$ y $\Delta y = 0.4m$. En esta situación se debe tener en cuenta lo siguiente: 1) se puede utilizar una separación diferente en los nodos de las distintas regiones de flujo, pero en la unión de estas dos regiones los nodos deben coincidir, 2) para completar con nodos la región de flujo, es necesario considerar *nodos fantasma* (Wang y Anderson, 1982), a los cuales, se les debe asignar presión $p=0$ para que la línea de superficie libre (freática) se desarrolle correctamente, y 3) como en este caso la incógnita es la presión hidrostática p , los nodos

ubicados en las fronteras de flujo deben tener como valor impuesto la presión hidrostática respectiva.

Una vez definida la línea de superficie libre (freática) con el método de la *Presión Extendida*, el problema se resuelve como uno de flujo confinado, siguiendo la metodología y ecuaciones que se indicaron para los problemas previos con el método

SOR. En esta aplicación también se implementó una hoja de cálculo para el análisis. Los resultados obtenidos de esta manera, permiten dibujar numéricamente la red de flujo que se muestra en la Figura 11.

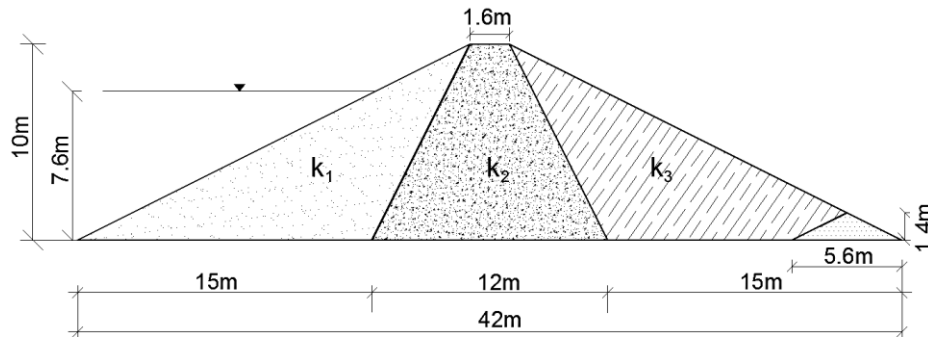


Figura 9. Presa de materiales graduados, reteniendo un tirante de agua de 7.6m.

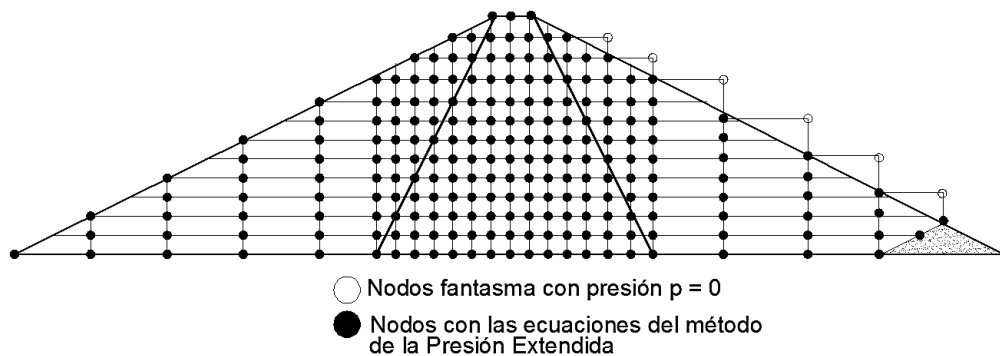


Figura 10. Arreglo esquemático de los nodos dentro de la zona de flujo.

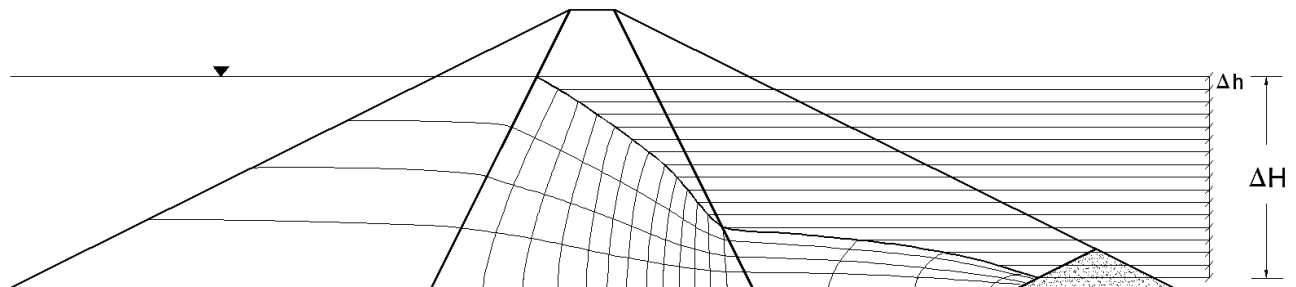


Figura 11. Solución con el método de la *Presión Extendida* al problema de flujo de agua en la presa de materiales graduados.

4 CONCLUSIONES

Se demostró que el método de *Sobre-relajaciones Sucesivas (SOR)* es una técnica poderosa que, mediante la resolución numérica de ecuaciones de diferencias finitas, a través de un proceso iterativo de Gauss-Seidel, permite resolver problemas de flujo confinado. Como una extensión del método *SOR* se implementó la técnica de la *Presión Extendida* a la solución de problemas de superficie libre (flujo no

confinado), resultando una buena alternativa para determinar la posición de la línea de superficie libre de forma adecuada en un medio heterogéneo. Se mostró que las ecuaciones del método *SOR* pueden habilitarse fácilmente con la ayuda de hojas de cálculo a la solución de problemas de flujo con complejidad variable, sin tener que recurrir a una programación más sofisticada o al empleo de software especializado, y que los resultados obtenidos de esta manera en pequeños tiempos de

cálculo, son suficientemente precisos para fines prácticos. La aplicabilidad del método se expuso con la solución de variados problemas prácticos, en los que, específicamente se obtuvieron las redes de flujo de forma numérica. En todos los problemas aquí expuestos, también es posible evaluar los gradientes hidráulicos, las velocidades de flujo y el gasto con expresiones en términos de diferencias finitas, fundamentadas en el método SOR (López-Acosta y González, 2014), similares a las empleadas en este artículo. De los análisis efectuados, se observó que al aplicar la técnica SOR es importante tanto en los problemas de flujo confinado como no confinado, seleccionar correctamente la separación entre los nodos de la malla con la que se modela la región de flujo, ya que si éstos se encuentran muy separados, la solución puede resultar burda e imprecisa, mientras que si el arreglo es pequeño, el tiempo de cálculo puede aumentar demasiado. Así, en el caso particular de las aplicaciones aquí expuestas, se observó que en problemas de flujo confinado donde el suelo de cimentación es homogéneo e isótropo, una separación entre nodos en el rango de 0.3 a 0.5m proporciona resultados con buena aproximación, mientras que en problemas de flujo no confinado, donde el material que compone la presa de tierra es heterogéneo, una separación de nodos de no más de 0.3m en alguna de sus direcciones es adecuada para obtener resultados con suficiente aproximación práctica.

REFERENCIAS

- Allen, N. de G. (1954) *Relaxation methods in engineering and science*. First Edition. Mc. Graw Hill Inc., United States, 257 pp.
- Baiocchi, C. (1971) "Sur un problème a frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux", C.R. Acad. Sci. Paris 273, pp. 1215-1217.
- Bardet, J.P. y Tobita, T. (2002) "A practical method for solving free-surface seepage problems". *Computers and Geotechnics*. Vol. XXIX, pp. 451-475.
- Brezis, H., Kinderlehrer, D. y Stampacchia, G. (1979) "Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue". *Serie A*. Paris: C. R. Academie des Sciences.
- Cryer, C.W. (1970) "On the approximate solution of free boundary problems using finite differences". *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. XVII, pp. 397-411.
- Dupuit, J. (1863) "Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables". Paris.
- Finnemore, E.J. y Perry, B. (1968) "Seepage through an earth dam computed by the relaxation technique". *Water Resources Research*, Vol. IV, pp. 1059-1067.
- Juárez-Badillo, E. y Rico, A. (1972) *Mecánica de suelos*. Tomo III Flujo de agua en suelos, Editorial LIMUSA, México, D.F.
- Kozeny, J. (1931) "Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss-und Kanalversickerung-Nasserkraft und Wasserwirtschaft (Groundwater movement with free surface in channels and hydroelectric energy by seepage in channels)", No. 3.
- López-Acosta, N.P. y González, J. L. (2014) "Study of water flow in dams with successive overrelaxations", sometido a una revista indizada (en proceso de arbitraje).
- Marsal, R. J. y Reséndiz, D. (1968) *Análisis de flujo de agua*, Cap. 6 del Libro: "Fundamentos del diseño y construcción de presas de tierra y enrocamiento", Publicación N° 183 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Mitchell, A.R. y Griffiths, D.F. (1980) *The finite difference method in partial differential equations*. First edition. John Wiley & Sons Ltd., New York, 272 pp.
- Salmasi, F. y Azamathulla, H.M. (2013) "Determination of optimum relaxation coefficient using finite difference method for groundwater flow". *Arabian Journal of Geosciences*, Vol. VI, pp. 3409-3415.
- Southwell, R. V. (1940) *Relaxation Methods in Engineering Science*, Oxford University Press.
- Wang, H.F. y Anderson, M.P. (1982) *Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*. First edition. Academic Press Inc., United Kingdom, 237 pp.
- Young, D. (1950) *Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type*. Ph. D. dissertation. Massachusetts, Harvard University, 74 pp.